

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZC 37

Functietheorie;Speciale onderwerpen.

Theorie en toepassingen der Laplace transformatie.

H.A.Lauwerier,C.G.Lekkerkerker.



1956

ZW

Printed at the Mathematical Centre, 49, 2e Boerhaavestraat, Amsterdam.

The Mathematical Centre, founded the 11-th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications. It is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O), by the Municipality of Amsterdam, by the University of Amsterdam, by the Free University at Amsterdam, and by industries.

Functietheorie. Speciale onderwerpen

I. Theorie der Laplace-transformatie

door

Dr C.G. Lekkerkerker

1. Definitie. Zij $F(t)$ een (reële of complexe) functie van de reële veranderlijke t en zij s een complexe veranderlijke. Laat $F(t)$ eigenlijk integreerbaar zijn over elk interval (a, b) , waarbij $0 < a < b < \infty$, en laat $\int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt$ bestaan voor zekere waarden van s . Dan noemen we de functie $f(s)$, bepaald door

$$(1) \quad f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt,$$

de Laplace-getransformeerde (kort L.T.) van $F(t)$.

De verzameling der functies $F(t)$ die aan de hierboven genoemde eisen voldoen noemen we de L-ruimte; de verzameling der daaraan door (1) toegevoegde functies $f(s)$ heet l-ruimte. We schrijven

$$f(s) = \mathcal{L} F(t).$$

$\mathcal{L}$ is een afbeelding van de L-ruimte op de l-ruimte. Het is een lineaire afbeelding (ga na).

Men noemt de afbeelding $\mathcal{L}$ wel de "eenzijdige Laplace-transformatie", in tegenstelling met de "tweezijdige Laplace-transformatie" $\mathcal{L}_2$, die we krijgen als we over $(-\infty, \infty)$ integreren i.p.v. over $(0, \infty)$, onder passende voorwaarden voor $F(t)$:

$$\bar{F}(s) = \mathcal{L}_2 F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} F(t) dt.$$

Voorbeelden. I. Zij $H(t) = \begin{cases} 1 & \text{als } t > 0 \\ \frac{1}{2} & \text{als } t = 0 \\ 0 & \text{als } t < 0 \end{cases}$ (Heavisidefunctie).

Voor $\operatorname{Re} s > 0$ is $\int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s}$. Dus:

$$(2) \quad \mathcal{L} H(t) = \frac{1}{s} \quad (\operatorname{Re} s > 0).$$

II. Zij $\operatorname{Re} \alpha > -1$. Voor $s > 0$ is

$$\int_0^{\infty} e^{-st} t^{\alpha} dt = s^{-(\alpha+1)} \int_0^{\infty} e^{-st} (st)^{\alpha} d(st) = \Gamma(\alpha+1) s^{-(\alpha+1)}.$$

Door de integratie-halfrechte te draaien om 0 over een hoek $-\arg s$ en de stelling van Cauchy toe te passen, vindt men dat het resultaat algemeen geldt voor $\operatorname{Re} s > 0$. Dus:

$$(3) \quad \mathcal{L} t^{\alpha} = \Gamma(\alpha+1) s^{-(\alpha+1)} \quad (\operatorname{Re} \alpha > -1, \operatorname{Re} s > 0).$$

III. Zij $a > 0$. Voor $\operatorname{Re} s > 0$ is $\int_0^{\infty} e^{-st} e^{iat} dt = \frac{1}{s-ia}$, wegens (3). Dus:

$$(4) \quad \mathcal{L} \cos a t = \frac{s}{s^2 + a^2}, \quad \mathcal{L} \sin a t = \frac{a}{s^2 + a^2} \quad (\operatorname{Re} s > 0, a > 0)$$

2. Het convergentiegebied.

Stelling 1. Bestaat, bij gegeven $F(t)$, de integraal in het rechterlid van (1) voor een zekere waarde $s=s_0$, dan bestaat deze integraal ook voor elke s met $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} s_0$.

Bewijs. We zullen gebruik maken van een partiële integratie en ons daarbij beroepen op de volgende stelling:

Als $f(x)$ en $g(x)$ eigenlijk integreerbaar zijn, en als

$$F(x) = C_1 + \int_0^x f(x) dx, \quad G(x) = C_2 + \int_0^x g(x) dx \quad (C_1, C_2 \text{ constante}),$$

dan geldt:

$$(5) \quad \int_a^b F(x) g(x) dx = F(x) G(x) \Big|_a^b - \int_a^b f(x) G(x) dx.$$

In deze stelling wordt niet over differentieerbaarheid van $F(x)$ en $G(x)$ gesproken. Om haar te bewijzen neemt men een willekeurige verdeling $(x_0=a, x_1, x_2, \dots, x_n=b)$ van (a, b) , herleidt

$$\begin{aligned} F(x)G(x) \Big|_a^b &= \sum_{j=1}^n \left\{ F(x_j)G(x_j) - F(x_{j-1})G(x_{j-1}) \right\} \\ &= \sum_{j=1}^n F(x_j) \cdot \left\{ G(x_j) - G(x_{j-1}) \right\} + \sum_{j=1}^n G(x_{j-1}) \cdot \left\{ F(x_j) - F(x_{j-1}) \right\} \\ &= \sum_{j=1}^n F(x_j) g(\xi_j) + \sum_{j=1}^n G(x_{j-1}) f(\xi'_j) \quad (x_{j-1} \leq \xi_j, \xi'_j \leq x_j) \end{aligned}$$

en toont aan dat de beide laatste sommen tot de integralen in het linker- en rechterlid van (5) naderen als men een rij verdelingen van oorspronkelijk grensd toenemende fijnheid doorloopt.

We beschouwen nu de functie $\varphi(t) = \int_0^t e^{-s_0 \tau} F(\tau) d\tau$ ($t \geq 0$). Uit het gegeven volgt, dat $\varphi(t)$ een eindig limiet heeft voor $t \rightarrow \infty$. Der is $\varphi(t)$ continu. Dus is $\varphi(t)$ begrensd:

$$|f(t)| \leq M \quad \text{voor } t \geq 0.$$

Laat s een willekeurig complex getal zijn met $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} s_0$. Uit formule (5) volgt, als we nemen $f(x) = -(s-s_0)e^{-(s-s_0)x}$ en $g(x) = e^{-s_0 x} F(x)$,

$$\begin{aligned} \int_0^\alpha e^{-st} F(t) dt &= \int_0^\alpha e^{-(s-s_0)t} \cdot e^{-s_0 t} F(t) dt \\ &= e^{-(s-s_0)\alpha} f(\alpha) + (s-s_0) \int_0^\alpha e^{-(s-s_0)t} f(t) dt \quad (\alpha \geq 0). \end{aligned}$$

De functie $e^{-(s-s_0)t} f(t)$ is integreerbaar over $(0, \infty)$, o.a. wegens

$$|e^{-(s-s_0)t} f(t)| \leq M e^{-(\operatorname{Re} s - \operatorname{Re} s_0)t}.$$

Dan is ook $e^{-st} F(t)$ integreerbaar over $(0, \infty)$ en er geldt:

$$(6) \quad \int_0^\infty e^{-st} F(t) dt = (s-s_0) \int_0^\infty e^{-(s-s_0)t} f(t) dt$$

(ga na). Daarmee is de stelling bewezen.

Uit stelling 1 kunnen we conclusies trekken omtrent de aard van de verzameling der getallen s , waarvoor bij gegeven $F(t)$ de integraal (1) convergeert. Zij σ_0 de onderste grens van de reële getallen s waarvoor deze integraal convergeert. Dan convergeert de integraal als $\operatorname{Re} s > \sigma_0$ en divergeert hij als $\operatorname{Re} s < \sigma_0$. Er is dus convergentie in het rechter-halvlak rechts van de verticaal $\operatorname{Re} s = \sigma_0$ en divergentie links daarvan. De rand $\operatorname{Re} s = \sigma_0$ van genoemd halvlak kan geheel, gedeeltelijk of helemaal niet tot het convergentiegebied behoren. We noemen σ_0 de convergentieabscis en het halvlak $\operatorname{Re} s > \sigma_0$ het convergentiehalvlak. Onder omstandigheden kan $\sigma_0 = -\infty$ en dus het convergentiehalvlak het hele complexe vlak zijn.

Stelling 2. Convergeert de integraal $\int_0^\infty e^{-st} F(t) dt$ absoluut voor $s=s_0$, dan convergeert hij absoluut voor $\operatorname{Re} s \geq \operatorname{Re} s_0$.

Bewijs. We hebben $|e^{-st} F(t)| = |e^{-(s-s_0)t}| \cdot |e^{-s_0 t} F(t)| \leq |e^{-s_0 t} F(t)|$, dus $\int_0^\infty |e^{-st} F(t)| dt \leq \int_0^\infty |e^{-s_0 t} F(t)| dt$, als $\operatorname{Re} s \geq \operatorname{Re} s_0$.

De onderste grens σ_1 van de reële getallen s , waarvoor de integraal in stelling 2 absoluut convergeert, heet de abscis van absolute convergentie. De integraal convergeert absoluut voor $\operatorname{Re} s > \sigma_1$, en divergeert absoluut voor $\operatorname{Re} s < \sigma_1$. De verticaal $\operatorname{Re} s = \sigma_1$ behoort geheel of helemaal niet tot het gebied van absolute convergentie. Het halvlak

$\operatorname{Re} s > \sigma_1$ noemen we het halfvlak van absolute convergentie. Men kan hebben $\sigma_1 = -\infty$ of $\sigma_1 = +\infty$.

Verder geldt: $\sigma_0 \leq \sigma_1$. Alle mogelijkheden, vervat in $-\infty \leq \sigma_0 \leq \sigma_1 \leq \infty$ ($\sigma_0 < \infty$), kunnen optreden.

Voorbeelden. I $F(t) = \begin{cases} 0 & \text{als } 0 \leq t < 1 \\ t^{-2} & \text{als } t \geq 1 \end{cases}$. We hebben $\sigma_0 = \sigma_1 = 0$; de rechte $\operatorname{Re} s = 0$ behoort tot de gebieden van gewone en absolute convergentie.

II $F(t) = e^{-t^2}$. Nu is $\sigma_0 = \sigma_1 = -\infty$.

III $F(t) = e^{at} \sin e^{bt}$ (a reëel, $b > 0$). Een eenvoudige substitutie geeft:

$$\mathcal{L}F(t) = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} \sin e^{bt} dt = \frac{1}{b} \int_1^\infty y^{-(s-a)/b-1} \sin y dy.$$

Dus $\sigma_0 = a-b$. Verder is $\sigma_1 = a$. De integraal convergeert niet als $\operatorname{Re} s = a-b$ en convergeert niet absoluut als $\operatorname{Re} s = a$.

3. Eigenschappen van $f(s)$.

Stelling 3. $f(s) = \mathcal{L}F(t)$ is een analytische functie van s in het convergentiehalfvlak $\operatorname{Re} s > \sigma_0$.

Bewijs. Een mogelijke bewijsmethode is dat men aantoonst dat

$\int_0^\infty e^{-st} F(t) dt$ voor $\operatorname{Re} s > \sigma_0$ onder het integraalteken gedifferentieerd mag worden, door gebruik te maken van stellingen uit de theorie der complexe functies. Voor de afgeleide van $f(s)$ vindt men dan $f'(s) = - \int_0^\infty e^{-st} (-t) F(t) dt$ (zie stelling 4). We zullen hier een andere methode volgen, die uitgaat van formule (6).

Zij s een complex getal met $\operatorname{Re} s > \sigma_0$. Wegens (6) is

$$f(s) = \mathcal{L}F(t) = (s-s_0) \int_0^\infty e^{-(s-s_0)t} \varphi(t) dt,$$

waar $\varphi(t) = \int_0^t e^{-s_0 \tau} F(\tau) d\tau$ continu en begrensd is voor $t \geq 0$. Het is voldoende de differentieerbaarheid aan te tonen van $f_1(s) = \int_0^\infty e^{-(s-s_0)t} \varphi(t) dt$.

Zij h een complex getal met $0 < |h| < \frac{1}{2}(\operatorname{Re} s - \sigma_0)$. Dan is

$$\begin{aligned} \frac{f_1(s+h) - f_1(s)}{h} &= \frac{1}{h} \int_0^\infty \left\{ e^{-(s+h-s_0)t} - e^{-(s-s_0)t} \right\} \varphi(t) dt \\ &= \int_0^\infty \frac{e^{-ht} - 1}{ht} \cdot e^{-(s-s_0)t} t \varphi(t) dt. \end{aligned}$$

We vergelijken de laatste integraal met $g(s) = - \int_0^\infty e^{-(s-s_0)t} t \varphi(t) dt$; deze integraal bestaat omdat $\varphi(t)$ begrensd is en

$|t e^{-(s-s_0)t}| = |t e^{-(\operatorname{Re} s - \sigma_0)t}|$ integreerbaar is over $(0, \infty)$. We hebben

$$\frac{f_1(s+h) - f_1(s)}{h} - g(s) = \int_0^{\infty} \left\{ \frac{e^{-ht} - 1}{ht} + 1 \right\} \cdot e^{-(s-s_0)t} t \varphi(t) dt.$$

Wegens

$$\left| \frac{e^{-ht} - 1}{ht} + 1 \right| = \left| \frac{ht}{2!} - \frac{(ht)^2}{3!} + \dots \right| \leq |ht| e^{|ht|} \leq |ht| e^{\frac{1}{2}(\operatorname{Re} s - \sigma_0)t}$$

is nu

$$\left| \frac{f_1(s+h) - f_1(s)}{h} - g(s) \right| \leq |h| \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(\operatorname{Re} s - \sigma_0)t} t^2 |\varphi(t)| dt.$$

De laatste integraal convergeert en hangt niet van h af. We vinden dus

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_1(s+h) - f_1(s)}{h} = g(s) = - \int_0^{\infty} e^{-(s-s_0)t} t \varphi(t) dt.$$

Hiermede is de stelling bewezen.

Stelling 4. Er geldt

$$f'(s) = - \mathcal{L} tF(t) = - \int_0^{\infty} e^{-st} tF(t) dt,$$

en algemener $f^{(n)}(s) = (-1)^n \mathcal{L} t^n F(t) = (-1)^n \int_0^{\infty} e^{-st} t^n F(t) dt$ ($\operatorname{Re} s > \sigma_0$).

Bewijs. In de notatie van het bewijs van stelling 3 hebben we

$$\begin{aligned} f'(s) &= f_1(s) + (s-s_0) f_1'(s) \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(s-s_0)t} \varphi(t) dt - (s-s_0) \int_0^{\infty} e^{-(s-s_0)t} t \varphi(t) dt. \end{aligned}$$

Krachtens formule (5) hebben we

$$\int_0^t \varphi(\tau) d\tau = \tau \varphi(\tau) \Big|_0^t - \int_0^t \tau e^{-s_0 \tau} F(\tau) d\tau = t \varphi(t) - \int_0^t \tau e^{-s_0 \tau} F(\tau) d\tau,$$

en dan ook

$$\begin{aligned} &(s-s_0) \int_0^t e^{-(s-s_0)\tau} \cdot \tau \varphi(\tau) d\tau \\ &= -e^{-(s-s_0)t} t \varphi(t) + \int_0^t e^{-(s-s_0)\tau} \cdot \{ \varphi(\tau) + \tau e^{-s_0 \tau} F(\tau) \} d\tau. \end{aligned}$$

Dus vinden we

$$f'(s) = \int_0^{\infty} e^{-(s-s_0)t} \varphi(t) dt - \int_0^{\infty} e^{-(s-s_0)t} \cdot \{ \varphi(t) + t e^{-s_0 t} F(t) \} dt$$

$$= - \int_0^{\infty} e^{-st} t F(t) dt.$$

Door herhaalde toepassing volgt de algemenere formule.

Uit stelling 3 volgt dat we ons bij de berekening van een L.T. kunnen beperken tot de reële waarden van s , als we daarna de gevonden functie $f(s)$ analytisch voortzetten in het convergentiehalfvlak. Zo is het voor het bewijs van formule (3) voldoende deze formule af te leiden voor positieve s .

We geven nu een stelling over het gedrag van een L.T. als $s \rightarrow \infty$.

Stelling 5. Laat $\int_0^{\alpha} |F(t)| dt$ bestaan voor $\alpha > 0$ en laat $f(s) = \mathcal{R}F(t)$ bestaan voor $s=s_0$. Dan geldt $f(s) \rightarrow 0$, als s tot oneindig nadert in de hoek

$$|\arg(s-s_0)| \leq \Theta,$$

waar Θ een getal is met $0 < \Theta < \frac{1}{2}\pi$.

Bewijs. Zij $\epsilon > 0$. We bepalen een positief getal a , zó dat b.v. voor alle s met $\operatorname{Re} s > 0$ geldt:

$$\left| \int_0^a e^{-st} F(t) dt \right| < \frac{1}{2} \epsilon.$$

Vervolgens passen we formule (6) met $F(t-a)$ in plaats van $F(t)$ toe. Men vindt gemakkelijk:

$$\int_a^{\infty} e^{-st} F(t) dt = (s-s_0) \int_a^{\infty} e^{-(s-s_0)t} \varphi_a(t) dt,$$

waar $\varphi_a(t) = \int_a^t e^{-s_0 \tau} F(\tau) d\tau$. De functie $\varphi_a(t)$ is begrensd:

$|\varphi_a(t)| \leq M$ voor $t \geq a$. Voor $|\arg(s-s_0)| \leq \Theta$ vinden we nu

$$\begin{aligned} \left| \int_a^{\infty} e^{-st} F(t) dt \right| &= |s-s_0| \cdot \left| \int_a^{\infty} e^{-(s-s_0)t} \varphi_a(t) dt \right| \\ &\leq M \cdot |s-s_0| \cdot \int_a^{\infty} e^{-\operatorname{Re}(s-s_0)t} dt = - \frac{M \cdot |s-s_0|}{\operatorname{Re}(s-s_0)} e^{-\operatorname{Re}(s-s_0)t} \Big|_a^{\infty} \\ &= \frac{M \cdot |s-s_0|}{\operatorname{Re}(s-s_0)} e^{-\operatorname{Re}(s-s_0)a} \leq \frac{M}{\cos \Theta} e^{-a \operatorname{Re}(s-s_0)}. \end{aligned}$$

Dus $\left| \int_a^{\infty} e^{-st} F(t) dt \right| < \frac{1}{2} \epsilon$ als $\operatorname{Re} s$ voldoende groot is. Dan is

$|f(s)| < \epsilon$ als $|\arg(s-s_0)| \leq \Theta$ en $\operatorname{Re} s$ voldoende groot. Daaruit volgt de stelling.

We merken op, dat $f(s)$ ook begrensd is in het genoemde gebied. Verder kan men aantonen, dat algemeen $f^{(n)}(s) \rightarrow 0$ als s in het genoemde gebied tot ∞ nadert.

Als toepassing van de stellingen 4 en 5 bepalen we $f(s) = \mathcal{L} \frac{1-e^{-t}}{t}$. De functie $F(t) = \frac{1-e^{-t}}{t}$ behoort tot de L-ruimte. We hebben hier $\sigma_0 = 0$ (ga na). Krachtens stelling 4 is $f'(s) = -\mathcal{L}(1-e^{-t})$. Dus

$$f'(s) = - \int_0^{\infty} e^{-st} dt + \int_0^{\infty} e^{-(s+1)t} dt = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s}.$$

Dan is $f(s) = \log(s+1) - \log s + C = \log\left(1 + \frac{1}{s}\right) + C$, met een zekere constante C . Wegens stelling 5 geldt $f(s) \rightarrow 0$, als s b.v. langs de reële as tot ∞ nadert. Omdat $\log\left(1 + \frac{1}{s}\right) \rightarrow 0$ voor $s \rightarrow \infty$, is dus $C=0$. Daarmee hebben we gevonden:

$$(7) \quad \mathcal{L} \frac{1-e^{-t}}{t} = \log\left(1 + \frac{1}{s}\right).$$

Op analoge wijze vindt men

$$(8) \quad \mathcal{L} \frac{\sin t}{t} = -\arctan s + \pi/2.$$

4. Weerspiegeling in de l-ruimte van operaties in de L-ruimte.

Er zijn verschillende operaties voor functies $F(t)$ in de L-ruimte, die zich op eenvoudige wijze weerspiegelen in de l-ruimte. In het volgende is steeds $f(s) = \mathcal{L} F(t)$.

Allereerst beschouwen we vermenigvuldiging van $F(t)$ met e^{at} (a een reële constante). We hebben

$$\int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} F(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} F(t) dt,$$

dus

$$(9) \quad \mathcal{L} e^{at} F(t) = f(s-a) \quad (\operatorname{Re} s > \sigma_0, \operatorname{Re} s-a > \sigma_0).$$

Verder is, voor $a > 0$, $\int_0^{\infty} e^{-st} F(at) dt = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} e^{-\frac{s}{a}t} F(t) dt$, dus

$$(10) \quad \mathcal{L} F(at) = \frac{1}{a} f\left(\frac{s}{a}\right), \quad \mathcal{L} F\left(\frac{t}{a}\right) = a f(as) \quad (a > 0).$$

Vervolgens is, voor $a > 0$, $\int_a^{\infty} e^{-st} F(t-a) dt = e^{-as} \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt$, dus

$$(11) \quad \mathcal{L} F(t-a) = e^{-as} f(s), \text{ verondersteld dat } F(t)=0 \text{ voor } t < 0.$$

Op grond van het bovenstaande kan men uit de formules (2) en (3) onmiddellijk afleiden

$$(12) \quad \mathcal{L} t^{\alpha} e^{at} = \Gamma(\alpha+1)(s-a)^{-(\alpha+1)} \quad (\operatorname{Re} \alpha > -1)$$

$$(13) \quad \mathcal{L} H(t-a) = \frac{1}{s} e^{-as}.$$

In het bijzonder is

$$(12') \quad \mathcal{L} e^{at} = \frac{1}{s-a}.$$

Uit stelling 4 volgt

$$(14) \quad \mathcal{L} t^n F(t) = (-1)^n f^{(n)}(s).$$

Indien $\frac{1}{t} F(t)$ tot de L-ruimte behoort en $\mathcal{L} \frac{1}{t} F(t) = f_1(s)$, dan is $f_1'(s) = -\mathcal{L} F(t) = -f(s)$, wegens stelling 5 dus $f_1(s) = \int_s^{\infty} f(u) du$. Dus

$$(15) \quad \mathcal{L} \frac{1}{t} F(t) = \int_s^{\infty} f(u) du.$$

Herhalen we dit nog een keer, dan vinden we: behoort $t^{-2}F(t)$ tot de L-ruimte, dan is

$$(16) \quad \mathcal{L} t^{-2}F(t) = \int_s^{\infty} du \int_u^{\infty} f(v) dv.$$

We gaan nu na hoe integratie in de L-ruimte zich weerspiegelt.

Stelling 6. Als $\mathcal{L} F(t)$ convergeert voor een positieve waarde $s=s_0$, dan convergeert $\mathcal{L} \left\{ \int_0^t F(\tau) d\tau \right\}$ ook voor $s=s_0$ en er geldt

$$(17) \quad \mathcal{L} \left\{ \int_0^t F(\tau) d\tau \right\} = \frac{1}{s} f(s) \quad (\operatorname{Re} s > s_0).$$

Bovendien is $\int_0^t F(\tau) d\tau = O(e^{s_0 t})$ voor $t \rightarrow \infty$ en dus

$$\mathcal{L} \left\{ \int_0^t F(\tau) d\tau \right\} \text{ absoluut convergent voor } \operatorname{Re} s > s_0.$$

Opmerking. Hier is het o-symbool van Landau gebruikt, gedefinieerd als volgt. Zijn gegeven twee functies $f(x)$ en $g(x)$, dan schrijft men $f(x)=o(g(x))$ voor $x \rightarrow a$ als $\lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x)=0$.

Bewijs. We maken gebruik van de volgende regel van L'Hôpital. Laat voor twee reële functies $g(x)$, $h(x)$ gelden:

1. $h(x) \rightarrow \infty$ voor $x \rightarrow \infty$
2. $g'(x)$ en $h'(x)$ bestaan voor x voldoende groot
3. $h'(x) \neq 0$ voor x voldoende groot.

Dan is

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g'(x)}{h'(x)}, \text{ mits de laatste limiet bestaat.}$$

We stellen nu $\Psi(x) = \int_0^x e^{-s_0 t} \left\{ \int_0^t F(\tau) d\tau \right\} dt$. Dan is, op grond van de genoemde regel,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \Psi(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{s_0 x} \Psi(x)}{e^{s_0 x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{s_0} [s_0 \Psi(x) + \Psi'(x)].$$

Wegens (5) is

$$s_0 \Psi(x) = -e^{-s_0 t} \int_0^t F(\tau) d\tau \Big|_0^x + \int_0^x e^{-s_0 t} F(t) dt = -\Psi'(x) + \int_0^x e^{-s_0 t} F(t) dt.$$

Dus, omdat de laatste integraal convergeert voor $x \rightarrow \infty$,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \Psi(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{s_0} \int_0^x e^{-s_0 t} F(t) dt = \frac{1}{s_0} f(s_0).$$

Hiermee is bewezen dat $\mathcal{L} \left\{ \int_0^t F(\tau) d\tau \right\}$ convergeert voor $s=s_0$.

Bovenstaande afleiding geldt ook als we s_0 vervangen door een getal s met $\operatorname{Re} s > s_0$. Dus geldt (17). Verder volgt uit bovenstaande afleiding, dat $\lim_{x \rightarrow \infty} \Psi(x)$ bestaat en eindig is, en gelijk is aan $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{s_0} [s_0 \Psi(x) + \Psi'(x)]$. Dus is $\lim_{x \rightarrow \infty} \Psi'(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-s_0 x} \int_0^x F(t) dt = 0$, dus $\int_0^x F(t) dt = o(e^{s_0 x})$ voor $x \rightarrow \infty$. Hiermee is de stelling bewezen.

We merken nog op, dat formule (17) een eenvoudig geval is van een eigenschap van de convolutie van twee functies (zie 6).

Laat nu $F'(t)$ bestaan voor $t > 0$, $F(t)$ een eindige limiet hebben voor $t \rightarrow +0$ en $F'(t)$ tot de L -ruimte behoren. Toepassing van (17) met $F'(t)$ in plaats van $F(t)$ geeft dan

$$\mathcal{L} \left\{ \int_0^t F'(\tau) d\tau \right\} = \frac{1}{s} \mathcal{L} F'(t),$$

dus

$$(18) \quad \mathcal{L} F'(t) = s [\mathcal{L} \left\{ \int_0^t F'(\tau) d\tau \right\} - F(0)] = s f(s) - F(0).$$

Herhaalde toepassing van (18), onder bijpassende voorwaarden voor $F(t)$, $F'(t)$, $F''(t)$, enz. geeft o.a.

$$(19) \quad \mathcal{L} F''(t) = s^2 f(s) - s F(0) - F'(0)$$

$$(20) \quad \mathcal{L} F'''(t) = s^3 f(s) - s^2 F(0) - s F'(0) - F''(0).$$

5. Het omkeringsprobleem.

In §1 hebben we voor een zekere klasse van functies $F(t)$ de Laplace-getransformeerde $f(s)=L F(t)$ gedefinieerd. Thans is aan de orde de vraag of men bij een gegeven complexe functie $f(s)$ een functie $F(t)$ kan bepalen, zodanig dat $f(s)=L F(t)$. Ook willen we weten of een zodanige functie $F(t)$ eenduidig is bepaald. Het zal blijken, dat dit probleem nauw samenhangt met een stelling over Fourierintegralen. We zullen die eerst behandelen en beginnen met enige opmerkingen vooraf.

Laat $F(x)$ een reële functie van de reële veranderlijke x zijn, die gedefinieerd is op het hele interval $-\infty < x < \infty$ en die de volgende eigenschap heeft: $F(x)$ is te schrijven als het verschil van twee monotoon niet-dalende functies. Voor elk begrensd interval (a,b) geldt dan blijkbaar dat de som

$$\sum_{i=1}^n |F(x_{i+1}) - F(x_i)|,$$

waar $x_1, x_2, \dots, x_n$ een willekeurig eindig aantal punten zijn met $a=x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n=b$, begrensd is. We drukken dit uit door te zeggen, dat de functie $F(x)$ op elk (begrensd) interval (a,b) van begrensde variatie is. Er geldt omgekeerd de eigenschap (die we hier niet aan zullen tonen), dat een reële functie $F(x)$, die op elk begrensd interval (a,b) van begrensde variatie is, te schrijven is als verschil van twee monotoon niet-dalende functies. Zo'n functie heeft in elk punt x een rechter- en een linkerlimiet; we zullen, zoals gebruikelijk, schrijven:

$$F(x+0) = \lim_{h \rightarrow 0}^+ F(x+h), \quad F(x-0) = \lim_{h \rightarrow 0}^- F(x+h).$$

Een complexe functie $F(x)$ van een reële veranderlijke x is dan en slechts dan van begrensde variatie op elk begrensd interval, als zowel het reële als het imaginaire bestanddeel van $F(x)$ dat zijn.

In het volgende zullen we verder gebruik maken van de volgende formule, die men b.v. bewijzen kan door toepassing van de residuenstelling (zie FE 55),

$$(21) \quad \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Uit deze formule vloeit voort, dat er een positieve constante C is, zodanig dat

$$(22) \quad \left| \int_{a_1}^{a_2} \frac{\sin bx}{x} dx \right| = \left| \int_{a_1 b}^{a_2 b} \frac{\sin y}{y} dy \right| < C \text{ voor alle } a_1, a_2, b > 0.$$

Door toepassing van de tweede middelwaardestelling van de integraalrekening leiden we uit (22) de volgende eigenschap af:

(a) Is een reële functie $F_1(x)$ niet-negatief en monotoon niet-dalend voor $x > 0$, dan geldt voor alle $a, b > 0$:

$$\left| \int_0^a \frac{\sin bx}{x} F_1(x) dx \right| < CF_1(a).$$

We formuleren en bewijzen nu de volgende

Integraalstelling voor Fourierintegralen. Zij een reële of complexe functie $f(x)$ (x reëel) van begrensde variatie (dus ook eigenlijk integreerbaar) op elk begrensd interval en zij $\int_{-\infty}^{\infty} |F(x)| dx$ convergent. Dan geldt:

$$(23) \quad \frac{F(x+0) + F(x-0)}{2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-b}^b e^{ixy} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iy\zeta} F(\zeta) d\zeta \right\} dy.$$

Bewijs. We stellen

$$I(y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iy\zeta} F(\zeta) d\zeta.$$

Deze integraal convergeert absoluut, daar

$|e^{-iy\zeta} F(\zeta)| = |F(\zeta)|$ en $\int_{-\infty}^{\infty} |F(x)| dx < \infty$. Zelfs convergeert $\int_{-a}^a e^{-iy\zeta} F(\zeta) d\zeta$ voor $a \rightarrow \infty$ uniform in y tot $I(y)$: bij elke $\varepsilon > 0$ is er een getal $a_0 > 0$, zó dat $\left| \int_{-a}^a e^{-iy\zeta} F(\zeta) d\zeta - I(y) \right| < \varepsilon$ als $a > a_0$, voor alle y . We mogen dan herleiden, als we tevens een verwisseling van integraties toepassen,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-b}^b e^{ixy} I(y) dy &= \frac{1}{2\pi} \int_{-b}^b e^{ixy} \left\{ \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a e^{-iy\zeta} F(\zeta) d\zeta \right\} dy \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-b}^b e^{ixy} \left\{ \int_{-a}^a e^{-iy\zeta} F(\zeta) d\zeta \right\} dy \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a F(\zeta) \left\{ \int_{-b}^b e^{ixy-iy\zeta} dy \right\} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\zeta) \frac{e^{ib(x-\zeta)} - e^{-ib(x-\zeta)}}{i(x-\zeta)} d\zeta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin b(\zeta-x)}{\zeta-x} F(\zeta) d\zeta. \end{aligned}$$

We moeten nu aantonen, dat, bij vaste x , de limiet van de laatste uitdrukking voor $b \rightarrow \infty$ bestaat en gelijk is aan $\frac{1}{2} \{F(x+0) + F(x-0)\}$. Zij ε een positief getal. Laten a en δ nog te kiezen positieve getallen zijn met

$$0 < \delta < 1, \quad a > |x| + 1.$$

We splitsen de laatste integraal als volgt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin b(\xi-x)}{\xi-x} F(\xi) d\xi = \int_{x-\delta}^{x+\delta} + \int_{x+\delta}^a + \int_a^{x-\delta} + \int_a^{\infty} + \int_{-\infty}^{-a}.$$

In de beide laatste bestanddelen is $|\xi-x| > 1$, dus

$$\left| \frac{\sin b(\xi-x)}{\xi-x} F(\xi) \right| \leq |F(\xi)|; \text{ wegens } \int_{-\infty}^{\infty} |F(\xi)| d\xi < \infty$$

kunnen we dan a zó bepalen dat

$$(24) \quad \left| \int_{-\infty}^{-a} + \int_a^{\infty} \right| < \frac{\epsilon}{3}, \text{ ongeacht } b.$$

We beschouwen nu het eerste bestanddeel. We zullen aantonen, dat we δ en een positief getal b_1 zó kunnen bepalen dat

$$(25) \quad \left| \int_{x-\delta}^{x+\delta} \frac{\sin b(\xi-x)}{\xi-x} F(\xi) d\xi - \frac{\pi}{2} \{F(x+0) + F(x-0)\} \right| < \frac{\epsilon}{3} \text{ voor } b > b_1.$$

Op grond van onze onderstellingen kunnen we $F(x)$ schrijven als $F_1(x) - F_2(x) + i F_3(x) - i F_4(x)$, waarbij de $F_k(x)$ reële, monotoon niet-dalende functies zijn. Het is blijkbaar voldoende (25) aan te tonen ingeval $F(x)$ een reële, monotoon niet-dalende functie is. Het linkerlid van (25) is ten hoogste gelijk aan

$$\begin{aligned} & \left| \int_x^{x+\delta} \frac{\sin b(\xi-x)}{\xi-x} \{F(\xi) - F(x+0)\} d\xi \right| + \\ & \quad + \left| \int_x^{x+\delta} \frac{\sin b(\xi-x)}{\xi-x} F(x+0) d\xi - \frac{\pi}{2} F(x+0) \right| \\ & + \left| \int_{x-\delta}^x \frac{\sin b(\xi-x)}{\xi-x} \{F(\xi) - F(x-0)\} d\xi \right| + \left| \int_{x-\delta}^x \frac{\sin b(\xi-x)}{\xi-x} F(x-0) d\xi - \right. \\ & \quad \left. - \frac{\pi}{2} F(x-0) \right| \\ & \leq \left| \int_0^\delta \frac{\sin b\xi}{\xi} \{F(x+\xi) - F(x+0)\} d\xi \right| + |F(x+0)| \cdot \left| \int_0^{b\delta} \frac{\sin \xi}{\xi} d\xi - \frac{\pi}{2} \right| \\ & + \left| \int_0^\delta \frac{\sin b\xi}{\xi} \{F(x-\xi) - F(x-0)\} d\xi \right| + |F(x-0)| \cdot \left| \int_0^{b\delta} \frac{\sin \xi}{\xi} d\xi - \frac{\pi}{2} \right| \\ & = \text{I} + \text{II} + \text{III} + \text{IV}. \end{aligned}$$

We bepalen nu δ zó dat

$$\left. \begin{array}{l} F(x+\delta) - F(x+0) \\ F(x-0) - F(x-\delta) \end{array} \right\} < \frac{\epsilon}{12C}.$$

Is eenmaal δ gekozen, dan kunnen we, wegens (21) en wegens $b\delta \rightarrow \infty$ voor $b \rightarrow \infty$, een positief getal b_1 bepalen, zodanig dat

$$II < \frac{\epsilon}{12}, \quad IV < \frac{\epsilon}{12} \quad \text{voor } b > b_1.$$

Op grond van de eigenschap (a) is

$$I < C \{ F(x+\delta) - F(x+0) \} < \frac{\epsilon}{12},$$

$$III < C \{ F(x-0) - F(x-\delta) \} < \frac{\epsilon}{12}.$$

Dus is $I + II + III + IV < \frac{\epsilon}{3}$. Daarmee is (25) bewezen.

Tenslotte beschouwen we, bij vaste a en δ , de integralen $\int_{x+\delta}^{x-\delta}$ en $\int_{x+\delta}^a$. We nemen weer aan dat $F(x)$ een reële, monotoon niet-dalende functie is.

Uit het tweede gemiddeldetheorema van de integraalrekening volgt dan, dat, voor zekere η met $x+\delta < \eta < a$,

$$\begin{aligned} \left| \int_{x+\delta}^a \frac{\sin b(\xi-x)}{\xi-x} F(\xi) d\xi \right| &= \left| F(x+\delta+0) \int_{x+\delta}^{\eta} \frac{\sin b(\xi-x)}{\xi-x} d\xi \right. \\ &\quad \left. + F(a-0) \int_{\eta}^a \frac{\sin b(\xi-x)}{\xi-x} d\xi \right| \\ &= \left| F(x+\delta+0) \int_{b\delta}^{b(\eta-x)} \frac{\sin \xi}{\xi} d\xi + F(a-0) \int_{b(\eta-x)}^{b(a-x)} \frac{\sin \xi}{\xi} d\xi \right|. \end{aligned}$$

Wegens (21) is er een positief getal b_2 , zodanig dat

$$\max [F(x+\delta+0), F(a-0)] \cdot \left| \int_c^d \frac{\sin \xi}{\xi} d\xi \right| < \frac{\epsilon}{12} \text{ als } d > c > b_2 \delta.$$

Dan is

$$(26) \quad \left| \int_{x+\delta}^a \frac{\sin b(\xi-x)}{\xi-x} F(\xi) d\xi \right| < \frac{\epsilon}{6} \text{ voor } b > b_2.$$

Een analoog resultaat geldt voor $\int_{-a}^{x-\delta}$, als b_2 goed gekozen is.

Uit (24), (25) en (26) volgt dat

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin b(\xi-x)}{\xi-x} F(\xi) d\xi - \frac{\pi}{2} \{ F(x+0) + F(x-0) \} \right| < \epsilon \text{ voor } b > \max(b_1, b_2).$$

Men merke hierbij op, dat de eigenlijke bijdrage tot de integraal links komt van het punt $\xi=x$. We hebben dus

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-b}^b e^{ixy} I(y) dy = \frac{1}{2} \{F(x+0) + F(x-0)\}.$$

Daarmee is de stelling bewezen.

We passen bovenstaande integraalstelling eerst toe op de tweezijdige L.T. Zij $F(t)$ een reële of complexe functie, gedefinieerd voor $-\infty < t < \infty$ en van begrensde variatie op elk begrensd interval. Zij $s=x+iy$ een complex getal en laat $e^{-st}F(t)$ absoluut integreerbaar zijn over $(-\infty, \infty)$, d.w.z. zij

$$\int_{-\infty}^{\infty} |e^{-st} F(t)| dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-xt} |F(t)| dt < \infty.$$

De functie $e^{-xt} F(t)$ is ook van begrensde variatie op elk begrensd interval. Zij $f(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} F(t) dt$; we kunnen schrijven:

$f(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iyt} \cdot e^{-xt} F(t) dt$. Op grond van de behandelde integraalstelling is nu

$$\frac{F(t+0) + F(t-0)}{2} e^{-xt} = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-b}^b e^{ity} f(x+iy) dy,$$

dus

$$\begin{aligned} \frac{F(t+0) + F(t-0)}{2} &= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-b}^b e^{(x+iy)t} f(x+iy) dy \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{x-ib}^{x+ib} e^{st} f(s) ds. \end{aligned}$$

We merken op dat $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_{x-ib}^{x+ib}$ kan bestaan, zonder dat $\int_x^{x+i\infty}$ en

$\int_{x-i\infty}^x$ bestaan. We noemen deze limiet de hoofdwaarde (van Cauchy) van

$\int_{x-i\infty}^{x+i\infty}$, geschreven H.W. $\int_{x-i\infty}^{x+i\infty}$. Analoog schrijven we in het rechterlid

van (23) H.W. $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty}$. We vatten het voorgaande samen in de volgende

Stelling 7. Zij $F(t)$ van begrensde variatie op elk begrensd interval en zij $f(s) = L_2 F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} F(t) dt$ absoluut convergent voor een zekere waarde $s=x+iy$. Dan is

$$(27) \quad \frac{F(t+0) + F(t-0)}{2} = \frac{1}{2\pi i} \text{ H.W. } \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{st} f(s) ds.$$

Er wordt hier geïntegreerd over een zekere verticaal i.p.v. de reële as. Men kan langs directe weg laten zien, dat, zoals behoort, het rechterlid van (27) onafhankelijk is van x . Maar het volgt ook uit de afleiding van (27).

Hebben we te maken met een eenzijdige L.T., dan hoeven we slechts te definiëren $F(t)=0$ voor $t < 0$ en kunnen we het vorige zonder meer toepassen. Dus:

Stelling 8. Zij $F(t)$ gedefinieerd voor $t \geq 0$ en van begrensde variatie op elk interval $(0, a)$ ($a > 0$). Zij σ_1 eindig en zij $f(s) = \mathcal{L}F(t) = \int_0^\infty e^{-st} F(t) dt$. Dan is

$$(27') \quad \frac{F(t+0) + F(t-0)}{2} = \frac{1}{2\pi i} \text{ H.W. } \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{st} f(s) ds \quad (x > \sigma_1).$$

Voor $t < 0$ is dus het rechterlid van (27') gelijk aan nul!

Wegaan nu na in hoeverre $F(t)$ door $f(s)$ bepaald is. Laat $F(t)$ aan de in stelling 7 genoemde voorwaarden voldoen. Is steeds $F(t) = \frac{1}{2} \{F(t+0) + F(t-0)\}$ ($-\infty < t < \infty$), dan zullen we $F(t)$ genormeerd noemen. In het algemeen kunnen wij naast $F(t)$ de functie $F^*(t)$ beschouwen, bepaald door

$$F^*(t) = \frac{1}{2} \{F(t+0) + F(t-0)\}.$$

Voor alle t is $F^*(t+0) = F(t+0)$, $F^*(t-0) = F(t-0)$. Dus is $F^*(t)$ genormeerd. Verder is $\int_{-\infty}^\infty e^{-st} F^*(t) dt = \int_{-\infty}^\infty e^{-st} F(t) dt$, zoals gemakkelijk volgt uit de definitie van integraal. Op grond hiervan en van stelling 7 kunnen we nu zeggen: de functies $F(t)$, waarbij eenzelfde genormeerde functie $F^*(t)$ hoort, bepalen dezelfde L.T. $f(s)$; anderzijds is, onder de voorwaarde voor $F(t)$ in stelling 7, $F^*(t)$ eenduidig bepaald door $f(s)$.

Tenslotte leiden we een resultaat af, waarbij in plaats van absolute convergentie slechts gewone convergentie van de Laplace-integraal wordt geëist. Laat $\mathcal{L}F(t)$ gewoon convergent zijn voor $s=s_0$. Dan is

$$\mathcal{L} e^{-s_0 t} F(t) \text{ convergent voor } \operatorname{Re} s > 0. \text{ Op grond van stelling 6 is dan } \mathcal{L} \left\{ \int_0^t e^{-s_0 \tau} F(\tau) d\tau \right\} \text{ absoluut convergent voor } \operatorname{Re} s > 0. \text{ Dus is } \mathcal{L} \left\{ e^{s_0 t} \int_0^t e^{-s_0 \tau} F(\tau) d\tau \right\} \text{ absoluut convergeert voor } \operatorname{Re} s > \operatorname{Re} s_0. \text{ De integraal in de laatste uitdrukking is een continue functie van } t, \text{ dus zeker een genormeerde functie. We passen nu stelling 8 toe. Door toepassing van de formules (9) en (17) vinden we}$$

$$\mathcal{L} e^{-s_0 t} F(t) dt = f(s+s_0), \quad \mathcal{L} \left\{ \int_0^t e^{-s_0 \tau} F(\tau) d\tau \right\} = \frac{1}{s} f(s+s_0),$$

$$\mathcal{L} \left\{ e^{s_0 t} \int_0^t e^{-s_0 \tau} F(\tau) d\tau \right\} = \frac{1}{s-s_0} f(s).$$

(Men kan dit resultaat ook uit formule (6) afleiden). Dus

$$(28) \quad \int_0^t e^{-s_0 \tau} F(\tau) d\tau = e^{-s_0 t} \cdot \frac{1}{2\pi i} \text{H.W.} \int_{x-1\infty}^{x+1\infty} e^{st} \frac{f(s)}{s-s_0} ds \quad (x > \text{Re } s_0).$$

Voorbeelden. I Uit (2) volgt, daar $e^{-st} H(t)$ absoluut integreerbaar en van begrensde variatie is als $\text{Re } s > 0$,

$$(29) \quad \frac{1}{2\pi i} \text{H.W.} \int_{x-1\infty}^{x+1\infty} \frac{e^{st}}{s} ds = \begin{cases} 1 & \text{als } t > 0 \\ \frac{1}{2} & \text{als } t = 0 \\ 0 & \text{als } t < 0 \end{cases} \quad (x > 0).$$

II Evenzo volgt uit (3)

$$(30) \quad \frac{1}{2\pi i} \text{H.W.} \int_{x-1\infty}^{x+1\infty} e^{st} s^{-\alpha} ds = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} \quad (x > 0, t > 0, \text{Re } \alpha > 0).$$

6. De convolutie van twee functies.

In § 4 hebben we voor verschillende operaties in de L-ruimte gezien hoe ze zich in de l-ruimte weerspiegelen. We bespreken thans een operatie die zich in de l-ruimte weerspiegelt als product.

Definitie. Onder de convolutie van twee functies $F_1(t)$ en $F_2(t)$ in de L-ruimte, geschreven $F_1(t) * F_2(t)$, kort $F_1 * F_2$, verstaan we de functie $F(t)$, bepaald door

$$(31) \quad F(t) = \int_0^t F_1(\tau) F_2(t-\tau) d\tau \quad (t > 0).$$

Men ga na dat de convolutie lineair is in beide factoren:

$$\begin{aligned} \{F_1(t) + F_2(t)\} * F_3(t) &= F_1(t) * F_3(t) + F_2(t) * F_3(t), \\ F_1(t) * \{F_2(t) + F_3(t)\} &= F_1(t) * F_2(t) + F_1(t) * F_3(t), \\ \{\lambda F_1(t)\} * F_2(t) &= F_1(t) * \{\lambda F_2(t)\} = \lambda F_1(t) * F_2(t). \end{aligned}$$

Stelling 9. De convolutie is commutatief.

$$\begin{aligned} \text{Bewijs. } F_1(t) * F_2(t) &= \int_0^t F_1(\tau) F_2(t-\tau) d\tau = - \int_t^0 F_1(t-\tau) F_2(\tau) d\tau \\ &= F_2(t) * F_1(t). \end{aligned}$$

Stelling 10. Als $\mathcal{L} F_1(t)$ en $\mathcal{L} F_2(t)$ absoluut convergeren voor $s=s_0$, dan convergeert ook $\mathcal{L} (F_1(t) * F_2(t))$ absoluut en er geldt

$$(32) \quad \mathcal{L} [F_1(t) * F_2(t)] = \mathcal{L} F_1(t) \cdot \mathcal{L} F_2(t),$$

$$\text{d.w.z.} \int_0^\infty e^{-st} \left\{ \int_0^t F_1(\tau) F_2(t-\tau) d\tau \right\} dt = \int_0^\infty e^{-st} F_1(t) dt \cdot \int_0^\infty e^{-st} F_2(t) dt.$$

Bewijs. Zij T een positief getal en zij $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} s_0$. We hebben

$$\begin{aligned} \int_0^T e^{-su} F_1(u) du \cdot \int_0^T e^{-sv} F_2(v) dv = \\ = \iint_{\substack{0 \leq u \leq T \\ 0 \leq v \leq T}} e^{-s(u+v)} F_1(u) F_2(v) du dv = \iint_{\substack{u \geq 0, v \geq 0 \\ u+v \leq T}} + \iint_{\substack{u \leq T, v \leq T \\ u+v \geq T}}. \end{aligned}$$

We hebben dus de dubbelintegraal gesplitst in twee dubbelintegralen over twee driehoeken. Uit de absolute integreerbaarheid over $(0, \infty)$ van $e^{-su} F_1(u)$, $e^{-sv} F_2(v)$ leidt men gemakkelijk af dat de dubbelintegraal over de tweede driehoek tot nul nadert voor $T \rightarrow \infty$. Die over de eerste driehoek gaat door de substitutie $u+v=t$, $u=\tau$ over in

$$\iint_{0 \leq \tau \leq t \leq T} e^{-st} F_1(\tau) F_2(t-\tau) dt d\tau = \int_0^T e^{-st} \left\{ \int_0^t F_1(\tau) F_2(t-\tau) d\tau \right\} dt.$$

In de limiet voor $T \rightarrow \infty$ is dus

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-su} F_1(u) du \cdot \int_0^T e^{-sv} F_2(v) dv = \\ = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-st} \left\{ \int_0^t F_1(\tau) F_2(t-\tau) d\tau \right\} dt, \end{aligned}$$

wat de gewenste betrekking geeft.

In het bovenstaande is omtrent dubbelintegralen alleen gebruikt, dat we zekere dubbelintegralen over rechthoeken konden schrijven als herhaalde integralen.

Om een algemenere stelling te krijgen tonen we eerst nog twee eigenschappen van de convolutie aan.

Stelling 11. De convolutie is continu.

Bewijs. We maken gebruik van de volgende eigenschap: is $T > 0$, $0 < h < 1$ en $G(t)$ eigenlijk integreerbaar op $(0, T+1)$, dan is

$$\int_0^T |G(t+h) - G(t)| dt \rightarrow 0 \text{ als } h \rightarrow +0.$$

Beschouwen we nu twee functies $F_1(t)$ en $F_2(t)$ uit de L -ruimte. Zij $F(t) = F_1(t) * F_2(t)$ en $t_0 > 0$. We hebben, als $h > 0$,

$$\begin{aligned} F(t_0+h) - F(t) &= \int_0^{t_0+h} F_1(\tau) F_2(t_0+h-\tau) d\tau - \int_0^{t_0} F_1(\tau) F_2(t_0-\tau) d\tau \\ &= \int_0^{t_0} F_1(\tau) \cdot \{F_2(t_0+h-\tau) - F_2(t_0-\tau)\} d\tau + \int_{t_0}^{t_0+h} F_1(\tau) F_2(t_0+h-\tau) d\tau, \end{aligned}$$

dus

$$|F(t_0+h)-F(t_0)| \leq \sup_{0 \leq \tau \leq t_0} |F_1(\tau)| \cdot \int_0^{t_0} |F_2(\tau+h)-F_2(\tau)| d\tau \\ + h \sup_{t_0 \leq \tau \leq t_0+h} |F_1(\tau)| \cdot \sup_{0 \leq \tau \leq h} |F_2(\tau)|.$$

Dus $F(t_0+h)-F(t_0) \rightarrow 0$ als $h \rightarrow +0$. Daaruit volgt de stelling.

Stelling 12. De convolutie is associatief.

Bewijs. Laten $F_1(t)$, $F_2(t)$, $F_3(t)$ drie functies uit de L-ruimte zijn. Zij T een positief getal en voeren we in drie functies $G_1(t)$, $G_2(t)$, $G_3(t)$ door te stellen

$$G_i(t) = \begin{cases} F_i(t) & \text{als } 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{als } t > T \end{cases} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Dan convergeert $\mathcal{R} G_1(t)$ absoluut voor alle s. Wegens stelling 10 hebben we dan

$$\mathcal{R} [(G_1 * G_2) * G_3] = \mathcal{R} (G_1 * G_2) \cdot \mathcal{R} G_3 = \mathcal{R} G_1 \cdot \mathcal{R} G_2 \cdot \mathcal{R} G_3,$$

en evenzo

$$\mathcal{R} [G_1 * (G_2 * G_3)] = \mathcal{R} G_1 \cdot \mathcal{R} (G_2 * G_3) = \mathcal{R} G_1 \cdot \mathcal{R} G_2 \cdot \mathcal{R} G_3.$$

De rechterleden stemmen hier overeen. Daar de convolutie continu is (stelling 11), zijn in verband met stelling 7 de convoluties in de linkerleden gelijk:

$$(G_1 * G_2) * G_3 = G_1 * (G_2 * G_3).$$

Dan is ook $(F_1 * F_2) * F_3 = F_1 * (F_2 * F_3)$ als $t \leq T$. Uit de willekeurigheid van T volgt nu de bewering.

We kunnen nu aantonen

Stelling 13. Zijn $\mathcal{R} F_1$, $\mathcal{R} F_2$, $\mathcal{R} (F_1 * F_2)$ convergent voor eenzelfde waarde $s=s_0$, dan geldt formule (32) voor $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} s_0$.

Bewijs. We halen er absoluut convergente Laplace-integralen bij, om stelling 10 toe te kunnen passen. Zij eens algemeen $G(t)$ een functie uit de L-ruimte, zodanig dat $\mathcal{R} G(t)$ convergeert voor $s=s_0$. Zij s een complex getal met $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} s_0$. Wegens formule 6 is

$$\int_0^\infty e^{-st} G(t) dt = (s-s_0) \int_0^\infty e^{-(s-s_0)t} \left\{ \int_0^t e^{-s_0\tau} G(\tau) d\tau \right\} dt,$$

waarbij de integraal rechts absoluut convergeert. We kunnen deze formule ook als volgt schrijven:

$$(33) \quad \mathcal{R} G(t) = (s-s_0) \mathcal{R} \left\{ e^{s_0 t} * G(t) \right\}.$$

We zetten nu $F = F_1 * F_2$ en vormen tweemaal de convolutie met $e^{s_0 t}$. Dat geeft, onder toepassing van de stellingen 9 en 12,

$$\begin{aligned} e^{s_0 t} * (e^{s_0 t} * F) &= e^{s_0 t} * \{F_1 * (e^{s_0 t} * F_2)\} \\ &= (e^{s_0 t} * F_1) * (e^{s_0 t} * F_2). \end{aligned}$$

Dus is, omdat $\mathcal{L}(e^{s_0 t} * F_1)$ en $\mathcal{L}(e^{s_0 t} * F_2)$ absoluut convergeren, $\mathcal{L}\{e^{s_0 t} * (e^{s_0 t} * F)\} = \mathcal{L}(e^{s_0 t} * F_1) \cdot \mathcal{L}(e^{s_0 t} * F_2)$, ofwel

$$\frac{1}{(s-s_0)^2} \mathcal{L} F = \frac{1}{s-s_0} \mathcal{L} F_1 \cdot \frac{1}{s-s_0} \mathcal{L} F_2,$$

dus $\mathcal{L} F = \mathcal{L} F_1 \cdot \mathcal{L} F_2$.

Toepassing 1. Berekening van $\varphi(t) = \int_0^t \tau^{p-1} (t-\tau)^{q-1} d\tau$ ($p, q > 0$). We hebben $\mathcal{L} t^{-1} = \Gamma(p) s^{-p}$, $\mathcal{L} t^{q-1} = \Gamma(q) s^{-q}$, dus

$$\mathcal{L} \varphi(t) = \Gamma(p) \Gamma(q) s^{-(p+q)}$$

Dan is

$$\varphi(t) = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} t^{p+q-1}.$$

In het bijzonder hebben we dus voor de betafunctie:

$$(34) \quad B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Toepassing 2. Zij $F(t)$ een functie uit de L-ruimte. We kunnen $\int_0^t F(\tau) d\tau$ opvatten als de convolutie van 1 en $F(t)$. Dus geldt:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t F(\tau) d\tau\right\} = \mathcal{L}\{1 * F\} = \mathcal{L} 1 \cdot \mathcal{L} F(t) = \frac{1}{s} \mathcal{L} F(t).$$

Daarmee is een nieuw bewijs verkregen van formule (17).

Literatuur.

- B.v.d. Pol- H. Bremmer, Operational Calculus based on the two-sided Laplace integral, Cambridge 1950.
- E. Hameister, Laplace-Transformationen. Eine Einführung für Physiker, Elektro-, Maschinen- und Bauingenieure, München usw. 1943.
- P. Funk- H. Sagan- F. Selig, Die Laplace-Transformation und ihre Anwendung, Wien 1943.
- G. Doetsch, Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation, Dover 1943; Handbuch der Laplace-Transformation I, Basel 1950.

Functietheorie. Speciale onderwerpen

II. Toepassingen van de Laplace-transformatie

door

Dr H.A. Lauwerier

1. De voornaamste rekenregels van de Laplace transformatie:

$$f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt \quad F(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} f(s) ds$$

$$F(t) \doteq f(s)$$

$$F'(t) \doteq s f(s) - F(0)$$

$$F''(t) \doteq s^2 f(s) - s F(0) - F'(0)$$

$$\int_0^t F(\tau) d\tau \doteq \frac{f(s)}{s}$$

$$t F(t) \doteq -f'(s)$$

$$\frac{F(t)}{t} \doteq \int_s^{\infty} f(\sigma) d\sigma$$

$$F(at) \doteq \frac{1}{a} f\left(\frac{s}{a}\right)$$

$$e^{at} F(t) \doteq f(s-a)$$

$$H(t-a) F(t-a) \doteq e^{-as} f(s)$$

$$\int_0^t F_1(\tau) F_2(t-\tau) d\tau \doteq f_1(s) f_2(s)$$

2. Lijst van Laplace transforms ¹⁾

$\underline{f(s)}$	$\underline{F(t)}$
$\frac{1}{s}$	1
$\frac{1}{s^2}$	t
$\frac{\Gamma(k+1)}{s^k}$	t^k
$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos at$
$\frac{1}{s^2+a^2}$	$\sin at$
$\frac{-\gamma - \ln s}{s} \quad (\gamma = 0.5772\dots)$	$\ln t$
$\frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$	$J_0(at)$

1) Cf Erdélyi c.s. Tables of Integral transforms I

3. Gewone Differentiaalvergelijkingen.

In principe kunnen gewone differentiaalvergelijkingen van de volgende typen met behulp van de Laplace transformatie op eenvoudige wijze worden opgelost.

a lineaire d.v. met constante coëfficiënten met beginvoorwaarden.

b lineaire d.v. met coëfficiënten van het type $\alpha t + \beta$,

als t de onafhankelijk variabele is, eveneens met beginvoorwaarden.

In feite is a een bijzonder geval van b maar a vormt verreweg het voornaamste toepassingsgebied. Meestal is de onafhankelijk variabele de tijd en moet via de differentiaalvergelijking uit de situatie voor $t=0$ (beginvoorwaarde) de toestand op een willekeurig later tijdstip worden bepaald. Indien op $t=0$ (en daarvoor) alles in rust is spreekt men, vooral in de electrotechniek, vaak van een inschakelverschijnsel. Een van de gekozen voorbeelden zal dan ook een eenvoudig schakelprobleem zijn.

We beginnen met een eenvoudig numeriek voorbeeld.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 3 \frac{dy}{dx} + 2y = e^x \quad 3.1$$

met de randvoorwaarden

$$\begin{cases} x = 0 & y = 0 \\ x = 0 & y' = 1 \end{cases} \quad 3.2$$

Pas nu de Laplace transformatie

$$\bar{y}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} y(x) dx$$

toe, dan is

$$y' \doteq s\bar{y}$$

$$y'' \doteq s^2 \bar{y} - 1$$

Aangezien

$$e^x \doteq \frac{1}{s-1}$$

gaat 3.1 over in

$$(s^2 - 3s + 2)\bar{y} = 1 + \frac{1}{s-1}$$

waardoor $\bar{y}$ meteen op eenvoudige wijze is bepaald:

$$\bar{y} = \frac{s}{(s-1)^2(s-2)}$$

We kunnen nu op twee wijzen terugtransformeren

a elementair, door het beeld te splitsen in eenvoudige stukken waarvan de originelen bekend zijn:

$$\begin{aligned} \frac{s}{(s-1)^2(s-2)} &= -\frac{1}{(s-1)^2} - \frac{2}{s-1} + \frac{2}{s-2} \\ &\doteq -(x+2)e^x + 2e^{2x} \end{aligned}$$

waarmee dus de oplossing van 3.1 en 3.2 is gevonden.

b met behulp van de omkeerformule en residuekening.

Het origineel van 3.3 is

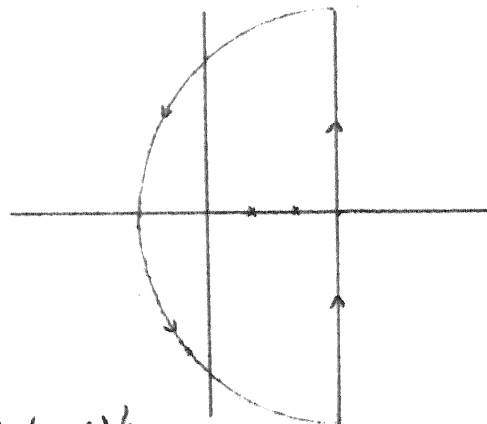
$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{sx} \frac{s}{(s-1)^2(s-2)} ds. \quad 3.4$$

Aangezien de verticaal $(c-i\infty, c+i\infty)$ rechts van de singulariteiten van het beeld moet lopen, hier polen bij $s=1$ en $s=2$, is $c > 2$. De integratieweg kunnen we opvatten als limietgeval van een contour bestaande uit een verticaal stuk en een halve cirkel (zie fig.1). De bijdrage van de halve cirkel nadert tot

nul als de straal van de cirkel onbeperkt aangroeit. Anderzijds is de integraal over de gesloten contour gelijk aan de som van de residuen van de ingesloten polen.

Het residu van de tweevoudige pool $s=1$ van 3.4 volgt uit

$$\begin{aligned} \frac{e^{sx} s}{(s-1)^2(s-2)} &= -e^x \frac{e^{(s-1)x} \{1+(s-1)\}}{(s-1)^2 \{1-(s-1)\}} \\ &= -e^x \frac{1}{(s-1)^2} \{1 + (s-1)x \dots\} \{1+2(s-1) \dots\}, \end{aligned}$$



figuur 1

is dus gelijk aan $-(x+2)e^x$.

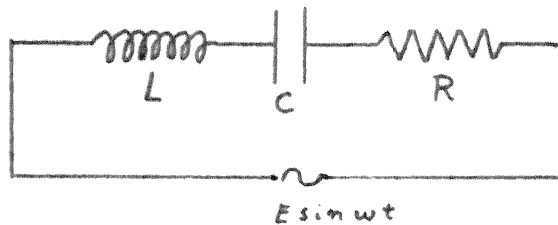
Het residu van de enkelvoudige pool $s=2$ is $2e^{2x}$.

Aldus vinden we wederom

$$y(x) = -(x+2)e^x + 2e^{2x}. \quad 3.5$$

Bij deze methodiek is het bestaan van de $\mathcal{L}$ -transform van $y(x)$ weliswaar a priori niet verzekerd maar achteraf blijkt dat $\bar{y}(s)$ inderdaad bestaat en wel voor $\text{Re } s > 2$. De gegeven bewerkingen zijn daarmee achteraf gerechtvaardigd.

Het volgende voorbeeld is ontleend aan de electriciteitsleer. Op een circuit bestaande uit een in serie geschakelde zelfinductie L , weerstand R en capaciteit C wordt op het tijdstip $t=0$ een wisselspanning $E \sin \omega t$ aangelegd. De aanvankelijke lading Q en stroom I zijn nul. Gevraagd wordt nu I als functie van de tijd.



figuur 2

De differentiaalvergelijking van deze schakeling is

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C} = E \sin \omega t \quad 3.6$$

waarbij $\frac{dQ}{dt} = I$.

De beginconditie is $t=0$ $Q=0$ $I=0$.

Laplace transformatie geeft

$$\bar{I} = \frac{E \omega s}{(Ls^2 + Rs + C^{-1})(s^2 + \omega^2)} \quad 3.7$$

Breuksplitsing geeft

$$\bar{I} = \frac{E}{Z^2} \frac{X(s+\mu) - \mu X'}{(s+\mu)^2 + n^2} - \frac{Xs - R\omega}{s^2 + \omega^2},$$

waarbij

$$\mu = \frac{R}{2L} \quad n^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}$$

$$X = L\omega - 1/C\omega \quad X' = L\omega + 1/C\omega \quad Z^2 = X^2 + R^2.$$

We nemen aan dat $n^2 > 0$. In dat geval geeft terugtransformatie

$$I = \frac{E}{Z} \sin(\omega t - \gamma) - \frac{E}{nZ \sqrt{LC}} e^{-\mu t} \sin(nt - \delta), \quad 3.8$$

waarbij $\text{tg } \gamma = X/R$ $\text{tg } \delta = nX/\mu X'$.

Voor grote t -waarden houden we na verwaarlozing van de tweede term in het rechterlid van 3.8 de "stationnaire oplossing" over:

$$I = \frac{E}{Z} \sin(\omega t - \gamma).$$

We beschouwen nu een toepassing van de $\mathcal{L}$ -transformatie op een lineaire differentiaalvergelijking met niet-constante coëfficiënten.

Het is bekend dat $J_0(t)$ voldoet aan de d.v. van Bessel

$$t F'' + F' + t F = 0 \quad 3.9$$

met de beginconditie

$$t = 0 \quad F = 1, \quad F' = 0.$$

Toepassing van Laplace transformatie geeft

$$-\frac{d}{ds}(s^2 f - s) + (sf - 1) - \frac{df}{ds} = 0$$

$$\text{of} \quad (s^2 + 1) \frac{df}{ds} + sf = 0, \quad 3.10$$

zodat de Bessel-vergelijking is teruggebracht tot een eenvoudige d.v. van de eerste orde. De oplossing van 3.10 is

$$f(s) = \frac{C}{\sqrt{s^2 + 1}}.$$

Derhalve is voor een zekere waarde van C

$$\int_0^\infty e^{-st} J_0(t) dt = \frac{C}{\sqrt{s^2 + 1}}.$$

Uit het gedrag van het linkerlid voor $s \rightarrow \infty$ volgt onmiddellijk $C=1$. We hebben dus gevonden

$$J_0(t) \doteq \frac{1}{\sqrt{s^2 + 1}}.$$

4. Partiele Differentiaalvergelijkingen.

a We beschouwen het volgende diffusieprobleem.

Een verticale cilindrische buis is tot een bepaald niveau $x=0$ gevuld met een gekleurde vloeistof. Hierop wordt voorzichtig een kleurloze vloeistof gegoten. Indien beide vloeistoffen hetzelfde s.g. hebben kan de invloed van de zwaartekracht verwaarloosd worden en treedt alleen tengevolge van diffusie vermenging op.gevraagd wordt nu na zekere tijd het concentratieverloop van de rode kleurstof in het gedeelte boven het nul-niveau.

Het mathematische model is a.v.
de diffusievergelijking voor de concentratie c van de gekleurde vloeistof is

$$D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = \frac{\partial c}{\partial t} \quad 4.1$$

$$t = 0 \quad \begin{cases} c = 0 & x > 0 \\ c = 1 & x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x \rightarrow +\infty & \quad c = 0 \\ x \rightarrow -\infty & \quad c = 1. \end{aligned}$$

Laplace transformatie geeft

$$D \frac{d^2 \bar{c}}{dx^2} - s \bar{c} = \begin{cases} 0 & x > 0 \\ 1 & x < 0 \end{cases} \quad 4.2$$

met de nevencondities

$$\begin{aligned} x \rightarrow +\infty & \quad \bar{c} = 0 \\ x \rightarrow -\infty & \quad \bar{c} = 1/s . \end{aligned}$$

De oplossing van 4.2 is van de vorm

$$\begin{aligned} \bar{c} &= A e^{-x\sqrt{s/D}} , \quad x > 0 , \\ \bar{c} &= \frac{1}{s} - B e^{x\sqrt{s/D}} , \quad x < 0 . \end{aligned}$$

De constanten A en B volgen uit de continuïteit van c en $\frac{\partial c}{\partial x}$ bij $x=0$:

$$A = \frac{1}{s} - B , \quad A = B ,$$

zodat dus $A = B = \frac{1}{2s}$.

De Laplace transform van c is dus

$$\bar{c} = \frac{1}{2s} e^{-x\sqrt{s/D}} \quad x > 0. \quad 4.3$$

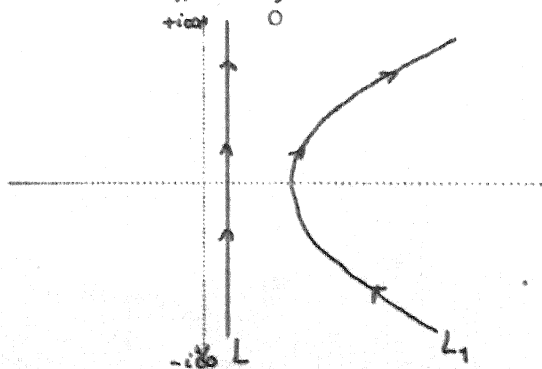
De teruggetransformeerde van deze uitdrukking vinden we niet in de tabel (tenminste niet in de hier gegevene) en daarom passen we de omkeeringsformule toe.

We zullen eerst bewijzen dat

$$\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}} = \frac{e^{-\frac{a^2}{4t}}}{\sqrt{\pi t}} \quad 4.4$$

Men heeft nml. (zie fig.3)

$$\begin{aligned} \frac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}} &= \frac{1}{2\pi i} \int_L e^{st-a\sqrt{s}} \frac{ds}{\sqrt{s}} = \frac{1}{\pi i} \int_L e^{w^2 t - aw} dw \\ &= \frac{e^{-\frac{a^2}{4t}}}{\pi i} \int_L e^{t(w - \frac{a}{2t})^2} dw = \frac{e^{-\frac{a^2}{4t}}}{\pi i} \int_{-1\infty}^{1\infty} e^{v^2 t} dv \\ &= \frac{2e^{-\frac{a^2}{4t}}}{\pi} \int_0^\infty e^{-u^2 t} du = \frac{e^{-\frac{a^2}{4t}}}{\sqrt{\pi t}} . \end{aligned}$$



figuur 3.

Integratie naar de parameter a in 4.4 geeft

$$\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s} = \int_a^\infty \frac{e^{-\frac{u^2}{4t}}}{\sqrt{\pi t}} du,$$

of

$$\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s} = \operatorname{erfc} \frac{a}{2\sqrt{t}} \quad 4.5$$

waarbij $\operatorname{erfc} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-u^2} du$

Opmerking. voor $x \rightarrow 0$ $\operatorname{erfc} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left\{ x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} \dots \right\}$

voor $x \rightarrow \infty$ $\operatorname{erfc} x \sim \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^3} + \frac{3}{4x^5} \dots \right\}$

$\operatorname{erfc} x$ neemt in $(0, \infty)$ monotoon af van 1 tot 0.

Aldus is de oplossing van het gegeven probleem

$$c = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{Dt}}, \quad x > 0. \quad 4.6$$

Voor $t \rightarrow \infty$ ontstaat blijkbaar de evenwichtstoestand $c_\infty = \frac{1}{2}$.

b. Het volgende voorbeeld is ontleend aan de theorie van de warmtegeleiding. Beschouw een cirkelvormige cilinder met begintemperatuur $T=0$. Gevraagd wordt het temperatuurverloop wanneer de cilinderwand op een constante temperatuur $T = T_0$ wordt gehouden.

De differentiaalvergelijking is

$$\kappa \left\{ \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right\} = \frac{\partial T}{\partial t}, \quad 0 < r < a; \quad 4-7$$

de beginvoorwaarde is

$$t=0 \quad T=0;$$

de randvoorwaarde is

$$r=a \quad T=T_0.$$

Pas nu Laplace transformatie toe. Indien

$$V = \int_0^\infty e^{-st} T(r,t) dt$$

dan voldoet V aan de gewone differentiaalvergelijking

$$\frac{d^2 V}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} - \frac{s}{\kappa} V = 0, \quad 4-8$$

met de randvoorwaarde

$$r=a \quad V = \frac{T_0}{s}.$$

De algemene oplossing van 4.8 is

$$V = A I_0(r\sqrt{\frac{s}{\kappa}}) + B K_0(r\sqrt{\frac{s}{\kappa}}),$$

waarbij $I_0(z)$ en $K_0(z)$ de Besselfuncties van de derde soort zijn. We vermelden even de volgende eigenschappen

$$I_0(z) = J_0(zi) = 1 + \frac{z^2}{4} + O(z^4), \quad (\text{gehele functie}).$$

$$K_0(z) = -\ln \frac{z}{2} - \gamma + O(z^2 \ln z), \quad (\text{log singulariteit in } z=0).$$

$$I_0(z) \sim \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}} \left(1 + \frac{1}{8z} \dots\right), \quad z \rightarrow \infty, \quad \operatorname{Re} z > 0.$$

Aangezien V voor $r=0$ niet singulier is moet $B=0$ zijn. De constante A bepalen we zodanig dat aan de randvoorwaarde bij $r=a$ is voldaan. Aldus vinden we

$$V = \frac{T_0}{s} \frac{I_0(r\sqrt{\frac{s}{\kappa}})}{I_0(a\sqrt{\frac{s}{\kappa}})}. \quad 4.9$$

Volgens het omkeertheorema is dus

$$\frac{T}{T_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_L st \frac{I_0(r\sqrt{\frac{s}{\kappa}})}{s I_0(a\sqrt{\frac{s}{\kappa}})} ds, \quad 4.10$$

waarbij L een verticaal is met $\operatorname{Re} s > 0$.

De contour kan voor $t > 0$ naar links worden omgelegd en omsluit dan de polen van de integrand

$$s = 0 \quad \text{en} \quad s = -\frac{\kappa \beta_n^2}{a^2},$$

waarbij β_n het n^{e} nulpunt van $J_0(x)$ is:

$$\beta_1 = 2.405, \quad \beta_2 = 5.520, \quad \beta_3 = 8.654 \dots$$

Volgens de residustelling is dan

$$\frac{T}{T_0} = \text{Res}(s=0) + \sum_1^{\infty} \text{Res}(s = -\frac{\kappa \beta_n^2}{a^2}),$$

of

$$\frac{T}{T_0} = 1 - 2 \sum_1^{\infty} e^{-\alpha_n t} \frac{J_0(\frac{r}{a} \beta_n)}{\beta_n J_1(\beta_n)}, \quad 4.11$$

waarbij $\alpha_n = \frac{\kappa \beta_n^2}{a^2}.$

De reeks 4.11 is zeer bruikbaar voor grote t , maar in de buurt van $t=0$ is de convergentie slecht.

Om ook iets voor kleine t te vinden passen we de volgende methode toe.

Volgens het omkeertheorema geldt in het algemeen

$$\begin{aligned} T(r,t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_L e^{st} V(r,s) ds \\ &= \frac{t^{-1}}{2\pi i} \int_L e^u V(r, \frac{u}{t}) du. \end{aligned}$$

Voor kleine t is dus de tweede variabele in $V(r,s)$ in het algemeen groot. Indien we dus $V(r,s)$ volgens formule 4.9 vervangen door de benaderde asymptotische uitdrukking

$$V(r,s) \sim \frac{T_0}{s} \sqrt{\frac{a}{r}} \frac{e^{-(a-r)\sqrt{\frac{s}{\kappa}}}}{s} \quad 4.12$$

verkrijgen we na terugtransformatie een benaderde uitdrukking voor $T(s,t)$, geldig voor kleine t .

Terugtransformatie van 4.12 geeft volgens formule 4.5

$$\frac{T}{T_0} \sim \sqrt{\frac{a}{r}} \text{erfc} \frac{a-r}{2\sqrt{\kappa t}}, \quad 4.13$$

bruikbaar voor kleine t , its evenwel $\frac{r}{a}$ niet klein is.

5. Toepassing van de tweezijdige Laplace transformatie

a. De tweezijdige Laplace transform van een functie $F(t)$ definiëren we a.v.

$$\varphi(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} F(t) dt. \quad 5.1$$

) is een analytische functie regulier in een strook $\alpha < \operatorname{Re} s < \beta$.
 mkening van 5.1 is

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L e^{st} \varphi(s) ds, \quad 5.2$$

bij L een in de regulariteitsstrook liggende verticaal is.
 ekenregels zijn

$$\begin{aligned} F(t) &\doteq \varphi(s) \\ F'(t) &\doteq s \varphi(s) \\ F''(t) &\doteq s^2 \varphi(s) \\ \int_{-\infty}^t F(\tau) d\tau &\doteq \frac{\varphi(s)}{s} \\ t F(t) &\doteq -\varphi'(s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{F(t)}{t} &\doteq \int_0^{\infty} \varphi(\sigma) d\sigma \\ F(at) &\doteq \frac{1}{a} \varphi\left(\frac{s}{a}\right) \\ e^{at} F(t) &\doteq \varphi(s-a) \\ F(t-a) &\doteq e^{-as} \varphi(s) \\ \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\tau) F_2(t-\tau) d\tau &\doteq \varphi_1(s) \varphi_2(s) \end{aligned}$$

voorbeeld waarbij de tweezijdige L-transformatie tot een eenvoudi-
 uitdrukking leidt dan de eenzijdige is

$$e^{-t^2} \doteq \sqrt{\pi} e^{\frac{s^2}{4}} \quad 5.3$$

rs

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} e^{-t^2} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t + \frac{s}{2})^2 + \frac{s^2}{4}} dt = e^{\frac{s^2}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi} e^{\frac{s^2}{4}}.$$

ls eerste toepassing kiezen we het in 4a beschouwde diffusiepro-
 n:

$$D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = \frac{\partial c}{\partial t}$$

$$t = 0 \quad \begin{cases} c=0 & x > 0 \\ c=1 & x < 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} x \rightarrow +\infty & c=0 \\ x \rightarrow -\infty & c=1 \end{matrix}$$

tellen nu

$$\varphi = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-sx} (1 - c(x, t)) dx.$$

unctie φ voldoet aan

$$\frac{d\varphi}{ds} = Ds^2 \varphi,$$

$$t = 0 \quad \varphi = \frac{1}{s}.$$

De oplossing is dus

$$\varphi = \frac{e^{Dt s^2}}{s}.$$

Volgens 5.3 en een eenvoudig rekenregeltje is dus

$$1 - c(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x}{2\sqrt{Dt}}} e^{-u^2} du,$$

of
$$c(x, t) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{Dt}}$$

in overeenstemming met het in 4.6 gevondene.

c. Het volgende voorbeeld is van iets ingewikkelder aard:

Een vloeistof stroomt met constante snelheid door een buis gevuld met grofkorrelig materiaal. Ergens op de as van de buis wordt met een klein buisje een gekleurde vloeistof geïnjecteerd. Ten gevolge van de door de vulling veroorzaakte "turbulente" stroming vindt vermenging plaats welke met behulp van een effectieve diffusiecoëfficiënt kan worden beschreven.

Men vraagt nu naar de stationnaire toestand welke zich na enige tijd instelt.

Het mathematische model is a.v.

$$\begin{aligned} -\infty < z < \infty \\ 0 < r < a \end{aligned} \quad D \left(\frac{\partial^2 c}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial c}{\partial r} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \right) = v \frac{\partial c}{\partial z}, \quad 5.4$$

$$z = -\infty \quad c = 0,$$

$$r = a \quad \frac{\partial c}{\partial r} = 0.$$

In de oorsprong, het injectiepunt, heeft men

$$c = \frac{Q}{\sqrt{r^2 + z^2}} + o(1).$$

Zonder bezwaar mogen we $a=1$ en $Q=1$ kiezen. We schrijven voorts $v/D=2\alpha$. Pas nu de volgende tweezijdige Laplace transformatie toe

$$\varphi = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-sz} c(r, z) dz.$$

De getransformeerde variabele $\varphi(r, s)$ voldoet aan de gewone d.v.

$$\frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} - \gamma^2 \varphi = 0$$

met $\gamma^2 = 2\alpha s - s^2.$

De algemene oplossing is weer

$$\varphi(r,s) = A I_0(\gamma r) + B K_0(\gamma r).$$

Uit de tabellen (b.v. Erdélyi 1.13.43) kunnen we afleiden

$$\frac{e^{-a\sqrt{t^2+b^2}}}{2\sqrt{t^2+b^2}} = K_0(b\sqrt{a^2-s^2}). \quad 5.5$$

Met behulp van de rekenregeltjes dus

$$K_0(\gamma r) = \frac{e^{-(-z+\sqrt{z^2+r^2})}}{2\sqrt{z^2+r^2}}.$$

Blijkbaar stelt de uitdrukking

$$c_0 = \frac{e^{-\alpha(-z+\sqrt{z^2+r^2})}}{\sqrt{z^2+r^2}} \quad 5.6$$

een oplossing van 5.4 voor met een puntbron in de oorsprong. Dit is echter de oplossing met diffusie in de gehele ruimte $-\infty < z < \infty$, $0 < r < \infty$. Met aanwezigheid van een cilinder $0 < r < 1$ wordt de zaak ingewikkelder.

Op grond van het voorafgaande stellen we dus

$$\varphi(r,s) = A I_0(\gamma r) + 2 K_0(\gamma r).$$

Uit de voorwaarde

$$r = 1 \quad \frac{d\varphi}{dr} = 0$$

volgt A, en we vinden

$$\varphi(r,s) = \frac{2}{I_0'(\gamma)} \left\{ K_0(\gamma r) I_0'(\gamma) - I_0(\gamma r) K_0'(\gamma) \right\}. \quad 5.7$$

De terugtransformatie van 5.7 geschiedt weer met behulp van de complexe omkeerformule.

Het regulariteitsgebied is blijkbaar de strook $0 < \operatorname{Re} s < 2\alpha$. Het rechterlid van 5.7 is een analytische functie met slechts gewone polen nml. die van $I_0'(\gamma)$.

Is δ_n het n^e nulpunt van $J_1(x)$,

$$\delta_0 = 0 \quad \delta_1 = 3.832 \quad \delta_2 = 7.016 \quad \dots,$$

Dan zijn de polen dus

$$s = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + \delta_n^2}.$$

Aldus vinden we voor $z > 0$ uit de polen links van de regulariteitsstrook

$$c = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_1(\delta_n r) e^{-z(-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \delta_n^2})}}{J_0^2(\delta_n) \sqrt{\alpha^2 + \delta_n^2}} \quad z \geq 0 \quad 5.8a$$

en voor $z < 0$ uit de polen rechts van de regulariteitsstrook

$$c = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_1(\delta_n r) e^{z(\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \delta_n^2})}}{J_0^2(\delta_n) \sqrt{\alpha^2 + \delta_n^2}} \quad z \leq 0 \quad 5.8b$$

Functietheorie. Speciale Onderwerpen.
Toepassingen van de Laplace Transformatie

door

Dr H.A. Lauwerier

6. Servomechanismen

We zullen hierin enige beschouwingen wijden aan de theoretische achtergrond van servomechanismen.

Een servomechanisme dient om automatisch de een of andere grootte in een systeem zo nauwkeurig mogelijk de veranderingen van een andere grootte te laten volgen.

We maken in de praktijk gaarne gebruik van z.g. blokschema's. We kunnen deze opbouwen uit elementen van het type



Bij een dergelijk element wordt de binnentredende tijdfunctie getransformeerd in een andere tijdfunctie. M.a.w. een dergelijk element werkt als een operator.

Voorbeeld: weerstand, condensator, versterker, integrator.

We beschouwen nu steeds lineaire systemen met lineaire operatoren:

$$\Omega(\alpha F + \beta G) = \alpha \Omega F + \beta \Omega G$$

voor constante α en β .

De responsie van een dergelijk element op de eenheidsfunctie

$$U(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

duiden we aan met $R(t)$.

De responsie van een dergelijk element op een momentane stoot van de intensiteit 1

$$\delta(t) = 0 \quad t \neq 0 \quad ; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 ,$$

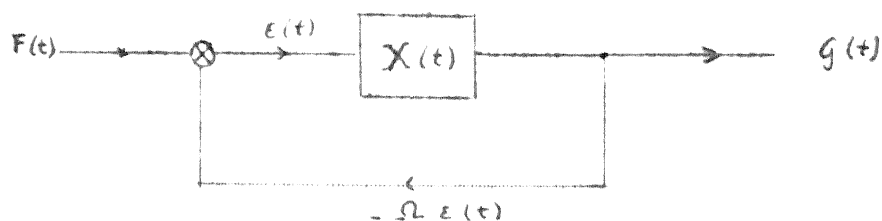
is dan blijkbaar $\frac{dR}{dt}$ hetgeen we ook vaak schrijven als $X(t)$. Op grond van het superpositiebeginsel kunnen we gemakkelijk de responsie op een willekeurige tijdfunctie $F(t)$ afleiden. Deze is nml $\int_{-\infty}^{\infty} F(\tau) X(t-\tau) d\tau$.

Schema

<u>input</u>	<u>output</u>
$\phi(t)$	$X(t)$
$U(t)$	$R(t) = \int_0^t X(\tau) d\tau$
$F(t)$	$G(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\tau) X(t-\tau) d\tau$
$\alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2$	$\alpha_1 G_1 + \alpha_2 G_2$
$\frac{dF}{dt}$	$\frac{dG}{dt}$
$\int_{-\infty}^t F(\tau) d\tau$	$\int_{-\infty}^t G(\tau) d\tau$

Belangrijk is de responsie op een sinusvormige input. Kiezen we b.v. $F(t) = ae^{-i\omega t}$ dan is blijkbaar $G(t) = ae^{-i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} X(\tau) d\tau$ d.w.z. precies hetzelfde verschijnsel maar met een andere (complexe) amplitude.

Het schema van een servomechanisme is in principe



Hierbij wordt verlangd dat de output $G(t)$ zo getrouw mogelijk de input-functie $F(t)$ volgt. Daartoe wordt de output $G(t)$ voortdurend met de input $F(t)$ vergeleken (terugkoppeling) zodat op de servo de aandrijvende kracht $\epsilon(t) = F(t) - G(t)$ werkt.

Uit de figuur volgt nu

$$F(t) - \Omega \epsilon(t) = \epsilon(t),$$

of

$$F(t) - \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon(\tau) X(t-\tau) d\tau = \epsilon(t). \quad 6.1$$

We passen nu Laplace transformatie toe.

Stel

$$f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt \equiv \mathcal{L}\{F(t)\} \quad \text{enz.}$$

dan volgt uit 6.1 volgens de convolutieregel

$$f(s) - \mathcal{L}(\epsilon) \mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(\epsilon)$$

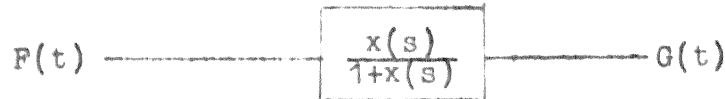
of

$$\mathcal{L}(\epsilon) = \frac{f(s)}{1+X(s)}$$

en dus

$$g(s) = \frac{X(s)}{1+X(s)} f(s). \quad 6.2$$

Uit 6.2 blijkt dus dat we het blokschema voor de servo geheel kunnen vervangen door een enkel blokje met karakteristiek $\frac{X(s)}{1+X(s)}$:



Men onderscheidt servo's met een proportionele werking, een integrerende, en een differentierende werking.

De karakteristieken $x(s)$ zijn resp.

$$\alpha, \frac{\beta}{s} \text{ en } \gamma s$$

hetgeen dus correspondeert met een output

$$\alpha F(t), \beta \int_0^t F(\tau) d\tau, \gamma \frac{dF}{dt}.$$

Een servo welke deze drie elementen in zich verenigt heeft dus de transmissiekarakteristiek

$$x(s) = \alpha + \frac{\beta}{s} + \gamma s. \quad 6.3$$

Voor de teruggekoppelde servo geldt dan

$$\frac{x(s)}{1+x(s)} = \frac{\beta + \alpha s + \gamma s^2}{\beta + (1+\alpha)s + \gamma s^2}. \quad 6.4$$

Voor zuiver proportionele actie gaat het rechterlid van 6.4 over in $\frac{\alpha}{1+\alpha}$ hetgeen wil zeggen dat

$$G(t) = \frac{\alpha}{1+\alpha} F(t) \quad 6.5$$

zodat de output nooit geheel gelijk aan $F(t)$ kan worden. Toevoeging van integrerende actie geeft

$$\mathcal{L}\{G(t)\} = \left\{ 1 - \frac{s}{\beta + (1+\alpha)s} \right\} \mathcal{L}\{F(t)\} \quad 6.6$$

waaruit volgt dat de output nauwkeuriger de input volgt. De responsie op $U(t)$ wordt b.v.

$$\left\{ 1 - \frac{1}{1+\alpha} \exp - \left(\frac{\beta}{1+\alpha} t \right) \right\} U(t) \quad 6.7$$

In het algemeen is

$$G(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} \frac{x(s)}{1+x(s)} f(s) ds. \quad 6.8$$

De integrand mag geen polen in het rechter halfvlak hebben aangezien anders $G(t)$ onbepaald zou aangroeien. Voor een goede servo is a priori wel $x(s)$ regulier in het rechter halfvlak maar het is nog helemaal niet zeker of $1+x(s)$ er geen nulpunten heeft.

Opdat de stabiliteit van het servomechanisme verzekerd is moet dus $x(s)+1$ geen nulpunten in het rechterhalfvlak bezitten.

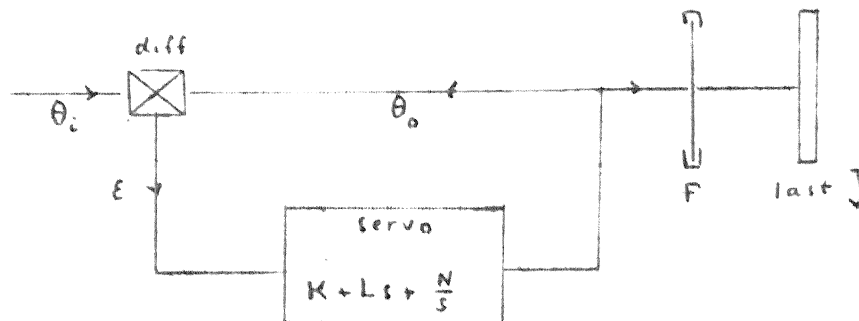
Voor een servo met karakteristiek 6.3 volgt dus uit 6.4 als stabiliteitscriterium dat $1+\alpha$, β en γ hetzelfde teken moeten hebben hetgeen wel verzekerd is. Voor het algemene geval maken we gebruik van de volgende hulpstelling.

Stelling. Is $w = \varphi(s)$ een functie analytisch in en op de gesloten kromme C met uitzondering van polen binnen C , en heeft $\varphi(s)$ geen nulpunten op C , dan beschrijft w een curve C' , welke de oorsprong in het w -vlak zo vaak omcirkelt als het excès van de nulpunten boven de polen van $\varphi(s)$ in C bedraagt.

Bewijs.
$$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dw}{w} = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)} ds$$

Kies nu in navolging van Nyquist voor φ de functie $x(s)$ en voor C de imaginaire as. Het aantal malen dat de beeldkromme C' het punt -1 omcirkelt is nu gelijk aan het aantal nulpunten van $x(s)+1$ in het rechterhalfvlak.

Voorbeeld



Twee assen worden in hun relatieve positie vergeleken door een differentiaal. Het verschil ϵ bestuurt een servo met proportionele actie K , differentierende L en integrerende N . De servo drijft een last met traagheidsmoment J aan. Een demping F vertraagt echter de output evenredig met de snelheid $\dot{\theta}_o$. De vergelijking van het systeem is

$$\left\{ K + L \frac{d}{dt} + N \int \right\} \epsilon = J \frac{d^2 \theta_o}{dt^2} + F \frac{d \theta_o}{dt},$$

dus wegens $\epsilon = \theta_i - \theta_o$

$$\mathcal{L}(\epsilon) = \frac{s^2 J + s F}{s^2 J + s(L+F) + K + \frac{N}{s}} \mathcal{L} \theta_i.$$

De stabiliteitscriterium is hier $K(L+F) > JN$.